منبع: محاسبات عددی دکتر شیوکار

Subject ۹۸/۴/۱۹

Date «جلسه‌ی اول»

«محاسبات عددی»

سرفصل ها:

مقدمه

1) حل عددی معادله $f(x) = 0$

2) درون یابی

3) انتگرال گیری عددی

4) حل عددی معادلات دیفرانسیل

5) حل عددی دستگاه معادلات خطی و غیرخطی

مقدمه: خطاها

برای حل یک مسئله از بیان مسئله تا جواب نهایی مسئله خطاهایی وجود دارد که عبارتند از:

1) خطاهای مدل (مثلاً صرف نظر کردن از اصطکاک):

در بعضی از مسائل از مدل های ریاضی استفاده می شود که استفاده کردن از این مدل ها موجب خطایی می شود که به این خطای مدل می گویند به عنوان مثال صرفاً نظر کردن از بعضی از عوامل طبیعی مانند اصطکاک، خلاء و ...

2) خطای داده

خطایی است که به دلیل عدم دقت بعضی از وسایل اندازه گیری به دست می آید چنین خطایی را خطای داده گویند

3) خطای گرد کردن اعداد

به دلیل محدودیت در ذخیره‌ی اعداد با بسط اعشاری دستی از ارقام اعشاری حذف می شود که در این حالت خطایی به وجود می آید که به آن خطای گرد کردن اعداد گویند

4) خطای محاسباتی

اعدادی که دارای خطا بودند توسط روابط ریاضی مانند جمع، ضرب و ... خطا انتشار پیدا می کنند چنین خطایی را خطای محاسباتی گویند

PAPCO

بعضی از خطاها مانند خطای مدل و خطای داده اجتناب ناپذیر هستند ولی بعضی از خطاها را می توان تا حدی
کم کرد و آن خطای ناشی اعداد است

خطای ناشی اعداد:

خطای ناشی از اعداد عبارتند از:

1) قطع کردن ساده:

اگر $a = u_0/u_1u_2 \dots u_n u_{n+1} \dots$ را بخواهیم با n رقم اعشار (nD) قطع کنیم، کافی است از رقم $(n+1)$ ام آن صرف نظر کنیم

مثال: اعداد زیر را با ارقام داده شده قطع کنید.

$a = 2/322451$ (3D)

$\bar{a} \simeq 2/322$

$b = -0/00345801$ (5D)

$\bar{b} \simeq -0/00345$

2) گرد کردن ساده:

اگر بخواهیم عدد اعشاری $a = u/u_1u_2 \dots u_n u_{n+1} \dots$ را با n رقم اعشار گرد کنیم داریم:

i) اگر $u_{n+1} > 5$ آنگاه یک واحد به u_n اضافه کرده و پس از u_{n+1} به بعد قطع می کنیم

ii) اگر $u_{n+1} < 5$ آنگاه از u_{n+1} به بعد قطع می کنیم (چیزی به u_n اضافه نمی شود)

iii) اگر $u_{n+1} = 5$ آنگاه

الف) اگر بعد از u_{n+1} رقمی وجود داشته باشد مانند (i) عمل می کنیم

ب) اگر بعد از u_{n+1} رقمی وجود نداشته باشد: 1- اگر u_n زوج باشد مانند (i) عمل می کنیم 2- اگر u_n فرد باشد مانند (ii) عمل می کنیم

نکته: خطای گرد کردن اعداد از خطای قطع کردن اعداد کمتر است

Subject
Date

مثال: اعداد داده شده زیر را با رقم معنادار مشخص شده گرد کنید.

$a_1 = 25/32481 \quad (3D)$

$\tilde{a}_1 \simeq 25/325$

$a_2 = -2/001341 \quad (4D)$

$\tilde{a}_2 = -2/0013$

$a_3 = 0/005321 \quad (2D)$

$\tilde{a}_3 = 0/01$

$a_4 = -1/235 \quad (2D)$

$\tilde{a}_4 = -1/23$

$a_5 = 0/32845 \quad (4D)$

$\tilde{a}_5 \simeq 0/3285$

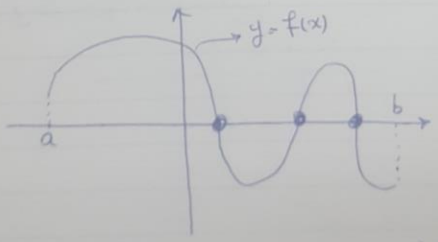
فصل اول:

حل عددی معادله $f(x) = 0$

برای حل عددی معادله‌ی $f(x) = 0$ ابتدا می‌بایست بررسی شود که این معادله‌ی فوق دارای جواب می‌باشد یا خیر. برای تعیین وجود و حدود ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم:

۱) روش ترسیمی:

برای تعیین وجود، تعداد ریشه و حدود ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ کافی است منحنی $y = f(x)$ را رسم کرده اگر این منحنی محور x ها را قطع کند، دارای ریشه می‌باشد.



$f(x) = x - \sin x = 0$

معادله $f(x) = 0$ را بصورت $f_1(x) = f_2(x)$ نوشته و سپس منحنی‌های $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$

Subject
Date

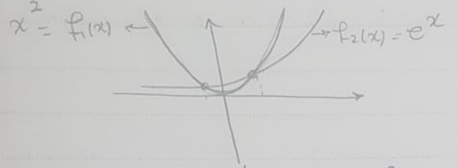
را رسم کرده، محل برخورد دو منحنی تعداد وجود ریشه ها را تعیین می کند.

مثال: وجود ریشه ی معادله $f(x) = x^2 - e^x = 0$ را بررسی کنید.

حل: داریم

$x^2 - e^x = 0 \longrightarrow \underbrace{x^2}_{f_1(x)} = \underbrace{e^x}_{f_2(x)}$

حال منحنی های $y = x^2$, $y = e^x$ را رسم می کنیم.

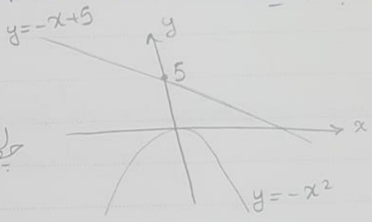


چون دو منحنی همدیگر را در دو نقطه قطع کرده اند لذا معادله $x^2 - e^x = 0$ دارای دو ریشه می باشد.

مثال: وجود ریشه ی معادله $f(x) = -x+5+x^2 = 0$ را به روش ترسیمی بررسی کنید.

$-x+5 = -x^2$

$y = -x+5 \quad , \quad y = -x^2$

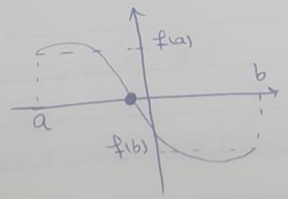


چون ۲ منحنی همدیگر را قطع نمی کنند لذا معادله فوق دارای ریشه نمی باشد.

۲) روش تحلیلی:

قضیه: اگر $f(x)$ در $[a,b]$ پیوسته باشد و داشته باشیم $f(a).f(b) < 0$ انگاه مقداری مانند $a < c < b$ یافت می شود به طوری که داشته باشیم:

$f(c) = 0$



PAPCO

Subject

Date

مثال: بررسی کنید که معادله $f(x) = -3x - e^x + 2 = 0$ در فاصله‌ی $[0, 1]$ حداقل یک ریشه دارد.

$a = 0 \rightarrow f(0) = 1$

$b = 1 \rightarrow f(1) = -3 - e + 2 = -1 - e < 0$ (e ≈ 2/…)

لذا چون ← $f(0) \cdot f(1) < 0$

پس معادله‌ی فوق در $[0, 1]$ حداقل یک ریشه دارد.

برای مشخص کردن صعودی یا نزولی بودن آن ابتدا از آن مشتق بگیریم و چون $f'(x) = -3 - e^x$ در فاصله‌ی $[0, 1]$ منفی است لذا $f(x)$ در این فاصله نزولی است در نتیجه معادله در $[0, 1]$ دقیقاً یک ریشه دارد

روش‌های عددی برای حل معادله $f(x) = 0$:

برای حل معادله‌ی $f(x) = 0$ از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم:

۱) روش ۲ بخشی (تنصیف):

برای حل معادله‌ی $f(x) = 0$ به روش ۲ بخشی به صورت زیر عمل می‌کنیم

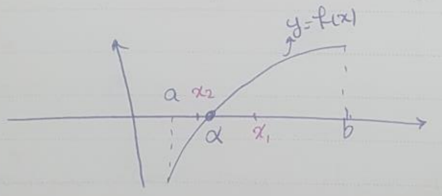
گام اول) $x_1 = \frac{a+b}{2}$ را به عنوان اولین تقریب ریشه در نظر می‌گیریم و داریم

i) اگر $f(x_1) = 0$ آنگاه $\alpha = x_1$

ii) اگر $f(a) \cdot f(x_1) < 0$ باشد آنگاه ریشه در فاصله $[a, x_1]$ قرار دارد و عمل تنصیف را برای معادله‌ی فوق در این فاصله تکرار می‌کنیم

iii) اگر $f(a) \cdot f(x_1) > 0$ آنگاه ریشه در فاصله $[x_1, b]$ قرار دارد و عمل تنصیف را در این فاصله تکرار می‌کنیم

گام دوم) عمل فوق را آن قدر تکرار می‌کنیم تا به جواب واقعی برسیم.



$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

$$x_2 = \frac{a+x_1}{2}$$

معیار توقف:

معیار توقف برای حل عددی معادله $f(x) = 0$ یکی از شرایط زیر است:

i) تعداد تکرار مشخص می‌شود

Subject
Date

ii) اگر دلخواه باشیم $|f(x_i)| < \varepsilon$ که ε عدد مطلوب داده شده است

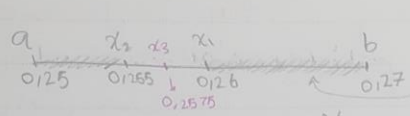
iii) اگر دلخواه باشیم $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

مثال: تقریبی از ریشه‌ی معادله $f(x) = 3x - e^{-x} = 0$ را که در فاصله‌ی $(0{,}25 , 0{,}27)$ قرار دارد، با سه رقم اعشار بدست آورید به طوری که دلخواه باشیم: $|f(x_n)| < 0{,}001$ باشد که x_n تقریبا ریشه در مرحله n ام است.

حل: داریم

$f(x) = 3x - e^{-x}$, $a = 0{,}25$, $b = 0{,}27$

$\varepsilon = 0{,}001$



$x_1 = \frac{0{,}25 + 0{,}27}{2} = 0{,}26$

$f(0{,}26) = 3(0{,}26) - e^{-0{,}26} = +0{,}0089$

$f(0{,}25) < 0$

$f(0{,}26) > 0 \longrightarrow < 0$ پس کش حد ضم مورد قبوله

n	a	b	x_n	$f(x_n)$	علامت $f(a) . f(x_n)$
1	0,25	0,27	0,26	+0,0089	−
2	0,25	0,26	0,255	−0,0099	+
3	0,255	0,26	0,2575	−0,0005	+

چون $|f(x_3)| = 0{,}0005 < 0{,}001$ لذا ریشه‌ی مطلوب است.

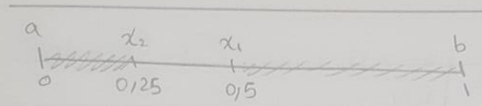
$\alpha \simeq x_3 = 0{,}2575 \rightarrow$ ۳ رقم اعشار

مثال: تقریبی از ریشه‌ی معادله $f(x) = x^2 - (1-x)^5 = 0$ را که در فاصله‌ی $(0,1)$ قرار دارد با 4D بدست آورید به طوری که دلخواه باشیم: $|f(x_n)| < 10^{-2}$ باشد که x_n تقریبا ریشه در مرحله n ام است.

حل: داریم

$f(x) = x^2 - (1-x)^5$, $a = 0$, $b = 1$

$\varepsilon = 10^{-2} = 0{,}01$



n	a	b	x_n	$f(x_n)$	علامت $f(a)\cdot f(x_n)$
1	0	1	0,5	0,21875	−
2	0	0,5	0,25	−0,17480	+
3	0,25	0,5	0,375	0,04526	−
4	0,25	0,375	0,31250	−0,05593	+
5	0,31250	0,375	0,34375	−0,00355	+

چون $|f(x_5)| = 0,00355 < 0,01$ لذا $\alpha \simeq x_3 = 0,3437$ ✓ (۴ رقم اعشار)

تمرین: تقریبی از ریشه‌ی معادلات زیر را به روش ۲ بخشی حساب کنید به طوری که $|f(x_n)| < \varepsilon$، تقریب‌ها را تا 4D به دست آورید.

1) $f(x) = x - \cos x = 0 \qquad [0,1]\ ,\ \varepsilon = 10^{-3}$

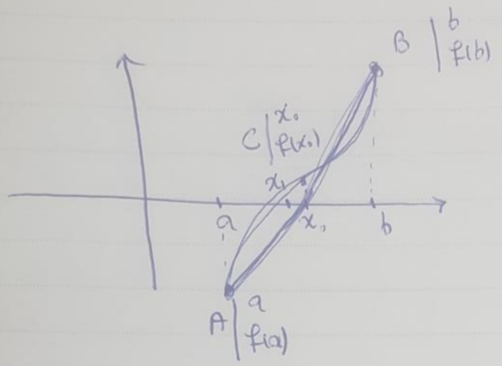
2) $f(x) = x\sin x - 1 = 0 \qquad [1, 1,5]\ ,\ \varepsilon = 0,03$

3) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \qquad [1,2]\ ,\ \varepsilon = 0,004$

در معادلات مثلثاتی که sin و cos داریم باید برحسب رادیان بنویسیم.

«۹۸,۴,۲۴» «جلسه‌ی نهم»

Subject
Date



$$x = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$$

مثال: تقریبی از ریشه ی معادله ی $f(x) = 3x - e^{-x} = 0$ را به روش نابجایی با سه رقم اعشار بدست آورید. این ریشه در فاصله $(0{,}25 \, , \, 0{,}27)$ قرار دارد. محاسبات را تا جایی ادامه دهید که داشته باشیم:

$$|f(x_n)| \leq 2 \times 10^{-2}$$

حل:

$$f(x) = 3x - e^{-x} \qquad a = 0{,}25 \quad , \quad b = 0{,}27$$

$$x_0 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{0{,}25 \cdot f(0{,}27) - 0{,}27 f(0{,}25)}{f(0{,}27) - f(0{,}25)} = 0{,}2576$$

چون $|f(x_0)| = 0{,}0001 < 2 \times 10^{-2}$

لذا x_0 تقریبی از جواب می باشد یعنی

$$\alpha \simeq x_0 = 0{,}258$$

مثال: تقریبی از ریشه ی معادله ی $f(x) = x^2 - 2^x = 0$ را به روش نابجایی با چهار رقم اعشار بدست آورید. این ریشه در فاصله ی $(-1 \, , \, 0)$ قرار دارد. محاسبات را تا جایی ادامه دهید که داشته باشیم:

$$|f(x_n)| \leq 10^{-2}$$

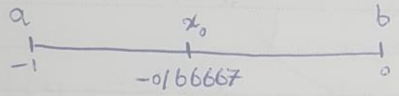
حل:

$f(x) = x^2 - 2^x \qquad a = -1 ,\ b = 0$

$$x_0 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{(-1) f(0) - 0 f(1)}{f(0) - f(-1)} = -0/66667$$

$$|f(x_0)| = -0/18552 > 10^{-2}$$

لذا x_0 تقریبی از جواب نمی‌باشد لذا روند را تکرار می‌کنیم



n	a	b	x_n	$f(a)$	$f(x_n)$	علامت $f(a) \cdot f(x_n)$
1	-1	0	-0/66667	0/5	-0/18552	-
2	-1	-0/66667	-0/75688	0/5	-0/01892	-
3	-1	-0/75688	-0/76574	0/5	-0/00179	-

چون $|f(x_3)| = 0/00179 < 10^{-2}$ لذا

$\alpha \simeq x_3 = -0/7657$

۳) روش نیوتن - رافسون

برای حل معادله‌ی $f(x) = 0$ در فاصله‌ی $[a, b]$ به روش نیوتن - رافسون مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- اولین تقریب ریشه را وسط بازه در نظر می‌گیریم یعنی $x_0 = \frac{a+b}{2}$ اگر x_0 جواب مطلوب باشد مسئله تمام است

۲- برای به دست آوردن دومین تقریب ریشه یعنی x_1 با داشتن x_0 معادله‌ی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی $\left| \begin{matrix} x_0 \\ f(x_0) \end{matrix} \right.$ را رسم کرده محل برخورد این مماس با محور xها دومین تقریب ریشه یعنی x_1 می‌باشد اگر x_1 جواب مطلوب باشد مسئله تمام است در غیر این صورت این روند را آن قدر ادامه می‌دهیم تا به جواب مطلوب برسیم

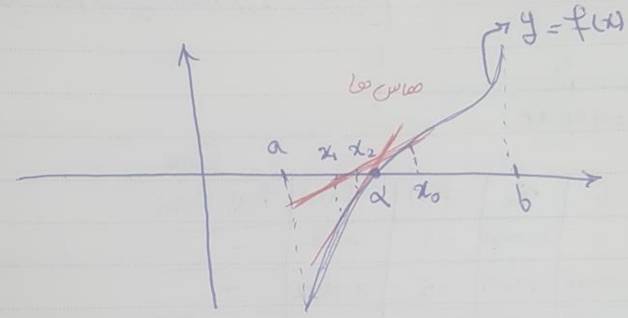
Subject

Date

با داشتن x_n برای بدست آوردن x_{n+1} در واقع معادله ی خط مماس بر منحنی در نقطه ی $(x_n, f(x_n))$ مقدار x_{n+1} از رابطه ی زیر حاصل می شود.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

رابطه ی فوق دستوری برای محاسبه ی ریشه ی معادله $f(x) = 0$ به روش نیوتن رافسون می باشد.



مثال: ریشه ی معادله $f(x) = x - \cos x = 0$ را که در فاصله ی $[0,1]$ قرار دارد. به روش نیوتن-رافسون با چهار رقم اعشار بدست آورید به طوری $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-2}$ قرار دهید. $x_0 = 0,5$.

$$f(x) = x - \cos x \Rightarrow f'(x) = 1 + \sin x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos(x_n)}{1 + \sin(x_n)}$$

$$n = 0 \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{x_0 - \cos(x_0)}{1 + \sin(x_0)} = 0,5 - \frac{0,5 - \cos(0,5)}{1 + \sin(0,5)} = 0,75522$$

$$n = 1 \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{x_1 - \cos(x_1)}{1 + \sin(x_1)} = 0,75522 - \frac{0,75522 - \cos(0,75522)}{1 + \sin(0,75522)}$$

$= 0,73914$

Subject

Date

$$n=2 \Rightarrow x_3 = x_2 - \frac{x_2-\cos(x_2)}{1+\sin(x_2)} = 0.73914 - \frac{0.73914-\cos(0.73914)}{1+\sin(0.73914)}$$

$$= 0.73909$$

چون $|x_3-x_2|<10^{-2}$ لذا $\alpha \simeq x_3$

$$\boxed{\alpha \simeq x_3 = 0.7391}$$

مثال: ریشه‌ی معادله $f(x)=3e^x-\frac{1}{x}=0$ را که در فاصله‌ی $(0.2, 0.3)$ قرار دارد، به روش نیوتن-رافسون با چهار رقم اعشار درست آورید به طوری که قرار دهید $x_0=0.25$.

$$f(x)=3e^x-\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=3e^x+\frac{1}{x^2}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow x_{n+1}=x_n-\frac{3e^{x_n}-\frac{1}{x_n}}{3e^{x_n}+\frac{1}{x_n^2}}$$

$$n=0 \Rightarrow x_1 = x_0-\frac{3e^{x_0}-\frac{1}{x_0}}{3e^{x_0}-\frac{1}{x_0^2}} = 0.25-\frac{3e^{0.25}-\frac{1}{0.25}}{3e^{0.25}+\frac{1}{(0.25)^2}} = 0.25745$$

$$n=1 \Rightarrow x_2 = x_1-\frac{3e^{x_1}-\frac{1}{x_1}}{3e^{x_1}+\frac{1}{x_1^2}} = 0.25763$$

$$n=2 \Rightarrow x_3 = x_2-\frac{3e^{x_2}-\frac{1}{x_2}}{3e^{x_2}+\frac{1}{x_2^2}} = 0.25763$$

چون جواب با پنج رقم اعشار در مرحله دوم و سوم تکراری است لذا به جواب رسیده‌ایم یعنی

$$\boxed{\alpha \simeq x_2 = 0.2576}$$

روش تعیین چندجمله‌ای درونیاب

۱) چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ:

اگر $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط دو به دو متمایز و $f_0, f_1, \dots, f_n$ مقادیر تابع $f(x)$ به ازای نقاط فوق باشند، آنگاه چندجمله‌ای

که در آن $L_i(x)$ را تابع لاگرانژ گویند و از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

مثال: چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را بیابید:

	x_0	x_1	x_2
x_i	-1	0	1
f_i	1	1	3
	f_0	f_1	f_2

حل: داریم $n = 2$

$$P(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x)$$
$$= L_0(x) + L_1(x) + 3L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}(x^2-x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = 1-x^2$$

Subject

Date

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{1}{2}(x^2+x)$$

$$P(x) = L_0(x) + L_1(x) + 3L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2-x) + 1 - x^2 + \frac{3}{2}(x^2+x)$$

$$\boxed{P(x) = x^2 + x + 1}$$

برای حساب کردن معادله‌ای را بدست آوردیم در اعداد جمله حساب می‌کنیم

$$f(1/2) \simeq P(1/2) = 1/4 + 1/2 + 1 = 1.75$$

مثال: چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را بیابید.

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	-1	0	1	2
f_i	-2	-1	0	7
	f_0	f_1	f_2	f_3

حل:

داریم $n=3$

$$P(x) = f_0 \cdot L_0(x) + f_1 \cdot L_1(x) + f_2 \cdot L_2(x) + f_3 \cdot L_3(x)$$

$$= -2L_0(x) - L_1(x) + 7L_3(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{1}{6}(x^3-3x^2+2x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(x^3-2x^2-x+2)$$

چون f_2 صفر است پس نیازی نیست $L_2(x)$ را حساب کنیم

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{1}{6}(x^3-x)$$

PAPCO

Subject
Date

$$P(x) = -2\,L_0(x) - L_1(x) + 7\,L_3(x)$$

$$= \tfrac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 2x) - \frac{1}{2}(x^3 - 2x^2 - x + 2) + \frac{7}{6}(x^3 - x)$$

$$\boxed{P(x) = x^3 - 1}$$

معایب روش لاگرانژ:

۱- روش لاگرانژ برای داده هایی که تعداد آن ها زیاد باشد طولانی و محاسبات زیادی را لازم دارد.

۲- اگر در حین محاسبات داده ای جدید به جدول اضافه شود محاسبات قبلی قابل استفاده نمی باشد.

۳- درجه ی چندجمله ای درونیاب تنها بعد از اتمام محاسبات مشخص می شود.

2) چندجمله ای درونیاب به کمک تفاضلات تقسیم شده ی نیوتن

PAPCO

Subject

Date «۹۸/۵/۲» «جلسه‌ی سوم»

فرض کنید $x_0, x_1, \ldots, x_n$ نقاطی دو به دو متمایز و $f_0, f_1, \ldots, f_n$ مقادیر تابع $f(x)$ به ازای نقاط فوق باشند. اطلاع داریم:

تعریف تفاضل تقسیم شده نیوتن:

تفاضل تقسیم شده‌ی نیوتن مرتبه اول بین نقاط x_i , x_{i+1} را با $f[x_i, x_{i+1}]$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$$

- تفاضل تقسیم شده مرتبه دوم نیوتن برای نقاط x_i, x_{i+1}, x_{i+2} را با $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ نشان می‌دهند به صورت زیر مشخص است:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}}$$

در حالت کلی تفاضلات تقسیم شده‌ی مرتبه‌ی nام برای نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}] - f[x_1, \ldots, x_n]}{x_0 - x_n}$$

مثال: تفاضلات تقسیم شده‌ی نیوتن را برای داده‌های زیر بیابید.

	x_0	x_1	x_2
x_i	-1	0	1
f_i	1	2	0

$n = 2$

- تفاضلات مرتبه‌ی اول

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} = \frac{2 - 1}{-1 - 0} = -1$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2} = \frac{2 - 0}{0 - 1} = -2$$

$$f[x_0, x_2] = \frac{f_0 - f_2}{x_0 - x_2} = \frac{1 - 0}{-1 - 1} = -1/2$$

- تفاضلات مرتبه‌ی دوم:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{-1+2}{-1-1} = -1$$

اگر داده‌ها زیاد باشند محاسبات نیز خیلی بیشتر می‌شود پس استفاده کردن از این روش دشوار است.

نکته: برای تعیین تفاضلات تقسیم شده‌ی نیوتن با مرتبه‌های مختلف می‌توان از جدول تفاضلات تقسیم شده‌ی نیوتن استفاده کرده به طوری که اطلاعات داده‌های هر ستون بر اساس داده‌های ستون قبلی بدست آید. به عنوان مثال جدول تفاضلات تقسیم شده‌ی نیوتن برای نقاط $x_0, x_1, \dots, x_3$ به صورت زیر می‌باشد:

مثال: جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن را برای داده‌های زیر تشکیل دهید.

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3
f_i	f_0	f_1	f_2	f_3

$n = 3$

x_i	f_i	تفاضل مرتبه اول $f[x_i, x_{i+1}]$	تفاضلات مرتبه دوم $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	تفاضلات مرتبه سوم
x_0	f_0	$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	در اینجا نوشته
x_1	f_1	$f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
x_2	f_2	$f[x_2, x_3] = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2}$		
x_3	f_3			

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_0, x_3] - f[x_0, x_2]}{x_3 - x_0}$$

مثال: جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن را برای تابع جدولی زیر بنویسید:

$n = 3$

x_i	-1 (x_0)	1	2	3 (x_3)
f_i	0	3	1	2

Subject
Date

x_i	f_i	مرتبه اول	مرتبه دوم	مرتبه سوم
-1	0	$f[x_0,x_1] = \frac{3-0}{1-(-1)} = \frac{3}{2}$	$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{2-3/2}{2-(-1)} = -7/6$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3] =$
1	3	$f[x_1,x_2] = \frac{1-3}{2-1} = -2$	$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{1-(-2)}{3-1} = 3/2$	$\frac{3/2-(-7/6)}{3-(-1)} = \frac{2}{3}$
2	1	$f[x_2,x_3] = \frac{2-1}{3-2} = 1$		
3	2			

۲- فرمول چندجمله‌ای درونیاب به کمک تفاضلات تقسیم شده‌ی نیوتن:

اگر $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاطی دو به دو متمایز و $f_0, f_1, \dots, f_n$ مقادیر $f(x)$ به ازای نقاط فوق باشند آنگاه فرمول چندجمله‌ای درونیاب تفاضلات تقسیم شده‌ی نیوتن به فرم زیر می‌باشد:

$$P(x) = f_0 + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\dots,x_n]$$

برای حساب کردن چندجمله‌ای درونیاب به مقادیری که زیرشان خط قرمز کشیده‌ام نیاز داریم

مثال: چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی مثال قبل را بدست آورید. (جدول مثال در صفحه قبل)

حل: داریم $n=3$ لذا

$$P(x) = f_0 + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \times f[x_0,x_1,x_2,x_3]$$

$f_0 = 0$ $\quad f[x_0,x_1] = 3/2$ $\quad f[x_0,x_1,x_2] = \frac{-7}{6}$ $\quad f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{2}{3}$

$$P(x) = 0 + (x+1)(3/2) + (x+1)(x-1)(-7/6) + (x+1)(x-1)(x-2)\left(\frac{2}{3}\right) = \propto$$

$$P(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} - 7/6(x^2-1) + 2/3(x^2-1)(x-2) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{15}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + \propto$$

PaPCO

Subject
Date

مثال: چندجمله‌ای درونیاب را برای تابع جدولی زیر بنویسید:

x_i	0 (x_0)	1	3	6 (x_3)
f_i	1	-6	4	169

$n=3$

حل: فرمول چندجمله‌ای درونیاب

$$P(x) = f_0 + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$\cdot\, f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

x_i	f_i	مرتبه‌ی اول	مرتبه‌ی دوم	مرتبه‌ی سوم
0	(1)	(-7)	(4)	(1)
1	-6	5	10	
3	4	55		
6	169			

$$\Rightarrow P(x) = 1 + (x-0)(-7) + (x-0)(x-1)(4) + (x-0)(x-1)(x-3)(1)$$

$$\Rightarrow P(x) = x^3 - 8x + 1$$

روش سوم:

3) تعیین چندجمله‌ای درونیاب به کمک تفاضلات پیشرو نیوتن:

اگر $x_0, x_1, \ldots, x_n$ نقاطی دو به دو متمایز و متساوی الفاصله باشند یعنی $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (یک مقدار ثابت $= h$) در این صورت داریم: $x_s = x_0 + sh$

و $f_0, f_1, \ldots, f_n$ مقادیر $f(x)$ به ازای نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ باشد

تعریف تفاضل پیشرو نیوتن: عملگر تفاضل پیشرو نیوتن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Delta^i f_s = \begin{cases} f_s & \text{اگر } i=0 \\ \Delta^{i-1} f_{s+1} - \Delta^{i-1} f_s & \text{اگر } i>0 \end{cases}$$

در حالت خاص:

$$\begin{cases} \overset{0}{\Delta} f_s = f_s \\ \overset{1}{\Delta} f_s = \overset{0}{\Delta} f_{s+1} - \overset{0}{\Delta} f_s = f_{s+1} - f_s \Rightarrow \boxed{\Delta f_s = f_{s+1} - f_s} \\ \overset{2}{\Delta} f_s = \overset{1}{\Delta} f_{s+1} - \overset{1}{\Delta} f_s = (f_{s+2} - f_{s+1}) - (f_{s+1} - f_s) \Rightarrow \end{cases}$$

$$\boxed{\overset{2}{\Delta} f_s = f_{s+2} - 2 f_{s+1} + f_s}$$

نکته: همیشه به جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن (می‌توان جدول تفاضلات) می‌توان جدول مشابه آن برای عملگر پیشرو نیوتن برای ساده کردن محاسبات تشکیل داد

مثال: جدول تفاضل عملگر پیشرو نیوتن را برای داده‌های زیر بیابید:

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3
f_i	f_0	f_1	f_2	f_3

x_i	f_i	Δf_i	$\overset{2}{\Delta} f_i$	$\overset{3}{\Delta} f_i$
x_0	f_0			
		$\Delta f_0 = f_1 - f_0$		
x_1	f_1		$\overset{2}{\Delta} f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$	
		$\Delta f_1 = f_2 - f_1$		$\overset{3}{\Delta} f_0 = \overset{2}{\Delta} f_1 - \overset{2}{\Delta} f_0$
x_2	f_2		$\overset{2}{\Delta} f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1$	
		$\Delta f_2 = f_3 - f_2$		
x_3	f_3			

مثال: جدول عملگر پیشرو نیوتن را برای داده های زیر بیابید:

$n=3$

	x_0			x_3
x_i	0	1	2	3
f_i	2	1	3	0

Subject
Date

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0	2	$\Delta f_0 = 1-2 = -1$	$\Delta^2 f_0 = 2-(-1) = 3$	$\Delta^3 f_0 = -5-3 = -8$
1	1	$\Delta f_1 = 3-1 = 2$	$\Delta^2 f_1 = 3-2 = -5$	
2	3	$\Delta f_2 = 0-3 = 3$		
3	0			

فرمول چندجمله‌ای درونیاب بر اساس عملگر پیشرو نیوتن:

اگر $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاطی دو به دو متمایز و متساوی‌الفاصله با طول h باشند یعنی داشته باشیم $x_s = x_0 + sh$ آنگاه چندجمله‌ای درونیاب بر اساس عملگر فوق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(x) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

که در آن $x = x_0 + sh$

مثال: چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را بر اساس عملگر پیشرو نیوتن به دست آورید.

x_i	-1 (x_0)	0	1	2 (x_3)
f_i	0	-1	2	9

$n = 3$

حل: $n=3$ ، $x_0 = -1$ ، $h = 1$ ← طول بین داده‌ها

$x = x_0 + sh \longrightarrow x = -1 + s \Rightarrow \boxed{s = x+1}$

$$P(x) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-1	0	$\Delta f_0 = -1$	$\Delta^2 f_0 = 4$	$\Delta^3 f_0 = 0$
0	-1	$\Delta f_1 = 3$	$\Delta^2 f_1 = 4$	
1	2	$\Delta f_2 = 7$		
2	9			

PAPCO

Subject
Date

$P(x) = 0 + S + \frac{S(S-1)}{2!}(4) + 0 = -S + 2S^2 - 2S = 2S^2 - 3S$

$P(x) = 2(x+1)^2 - 3(x+1) \Rightarrow \boxed{P(x) = 2x^2 + x - 1}$

مثال: چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را با عملگر پیشرو نیوتن بدست آورید.

x_i	1 (x_0)	2	3	4 (x_3)
f_i	2	5	10	17

$n = 3$

$h = 1 \ , \ x_0 = 1 \ ,$

$x = x_0 + Sh \rightarrow x = 1 + S \rightarrow \boxed{S = x - 1}$

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
1	(2)	$\Delta f_0 = (3)$	$\Delta^2 f_0 = (2)$	(0)
2	5	$\Delta f_1 = 5$	$\Delta^2 f_1 = 2$	
3	10	$\Delta f_2 = 7$		
4	17			

$P(x) = f_0 + S\Delta f_0 + \frac{S(S-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{S(S-1)(S-2)}{3!}\Delta^3 f_0$

$P(x) = 2 + (x-1)(3) + \frac{(x-1)(x-2)}{2!}2 \Rightarrow 2 + 3x - 3 + x^2 - 2x - x + 2$

$\Rightarrow \boxed{P(x) = x^2 + 1}$

نکته: روش عملگر پیشرو نیوتن را برای چندجمله‌ای درونیاب تنها وقتی می‌توان به کار گرفت که نقاط متساوی الفاصله باشند.

«فصل سوم»

انتگرال‌گیری عددی

Subject
Date

روش های عددی برای محاسبه‌ی $\int_a^b f(x)\,dx$ عبارتند از :

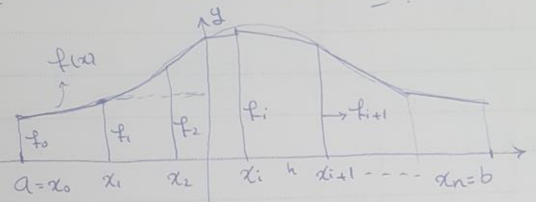
۱) روش ذوزنقه‌ای (Trapezoied)

۲) روش سیمپسون (Simpsone)

۱) روش ذوزنقه‌ای :

برای محاسبه $\int_a^b f(x)\,dx$ به روش ذوزنقه‌ای ابتدا فاصله‌ی $[a,b]$ را به n زیرفاصله‌ی

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ تجزیه کرده و در آن $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = h$ داریم :



تقریبی از مساحت زیر منحنی $f(x)$ در فاصله $[x_i, x_{i+1}]$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

از طرفی داریم :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a=x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \frac{h}{2}(f_2 + f_3) + \cdots + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n)$$

PAPCO

Subject
Date

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \simeq T(h) = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right]$$

رابطه‌ی فوق دستوری برای محاسبه‌ی $\int_a^b f(x)\,dx$ به روش ذوزنقه‌ای می‌باشد

مثال: تقریب‌هایی از $\int_{0.1}^{0.3} e^x\,dx$ را به روش ذوزنقه‌ای به ازای $h=0.2,\ 0.1,\ 0.05$ بیابید.

روش تحلیلی: $\int_{0.1}^{0.3} e^x\,dx = \left[e^x\right]_{0.1}^{0.3} = e^{0.3} - e^{0.1} = 0.24468$

حل: به ازای $h=0.2$ $(n=1)$

$x_0=0.1 \qquad x_1=0.3$

$$\int_{0.1}^{0.3} e^x\,dx \simeq T(0.2) = \frac{0.2}{2}\left[f_0+f_1\right] = 0.1\left(e^{0.1}+e^{0.3}\right) = 0.24550$$

- به ازای $h=0.1$ $(n=2)$

$x_0 = 0.1 \qquad x_1 = 0.2 \qquad x_2 = 0.3$

$$\int_{0.1}^{0.3} e^x\,dx \simeq T(0.1) = \frac{0.1}{2}\left[f_0+2f_1+f_2\right] = \frac{0.1}{2}\left[e^{0.1}+2e^{0.2}+e^{0.3}\right]$$

$$= 0.24489$$

- به ازای $h=0.05$ $(n=4)$

$x_0 = 0.1 \qquad x_1 = 0.15 \qquad x_2 = 0.2 \qquad x_3 = 0.25 \qquad x_4 = 0.3$

$$\int_{0.1}^{0.3} e^x\,dx \simeq T(0.05) = \frac{0.05}{2}\left[f_0+2f_1+2f_2+2f_3+f_4\right] =$$

$$\frac{0.05}{2}\left[e^{0.1}+2e^{0.15}+2e^{0.2}+2e^{0.25}+e^{0.3}\right] = 0.24474$$

PAPCO

Subject

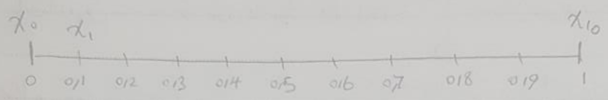
Date ۹۸,۵,۹

«جلسه ی چهارم»

مثال: مقدار انتگرال $\int_0^1 e^{x^2}dx$ را با طول گام $h=0,1$ به روش ذوزنقه را بدست آورید.

$a=0\ ,\ b=1\ ,\ h=0,1$

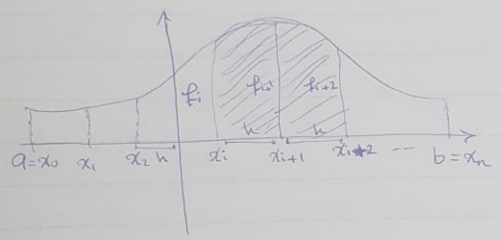
$n=10$



$$\int_0^1 e^{x^2}dx = T(0,1) \simeq \frac{h}{2}\left[f_0+2f_1+2f_2+\cdots+2f_9+f_{10}\right]$$

$$\simeq \frac{0,1}{2}\left[e^0+2\left(e^{(0,1)^2}+e^{(0,2)^2}+\cdots+e^{(0,9)^2}\right)+e^{(0,1)^2}\right] = 1,34731$$

۲) قاعده ی سیمپسون :



$[a,b]$

①

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \simeq \frac{h}{3}\left[f_i+4f_{i+1}+f_{i+2}\right]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n=b} f(x)dx$$

$$\simeq \frac{h}{3}\left[f_0+4f_1+f_2\right]+\frac{h}{3}\left[f_2+4f_3+f_4\right]+\dots+\frac{h}{3}\left[f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n\right]$$

برای محاسبه ی $\int_a^b f(x)\,dx$ به روش سیمپسون، فاصله ی $[a,b]$ به n زیرفاصله ی $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ تجزیه کرده که در آن n زوج است و سپس تقریبی از انتگرال $\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx$ در فاصله ی $[x_i, x_{i+2}]$ به صورت فوق در نظر می گیریم. ①

سپس داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(h) \simeq \frac{h}{3}\left[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\dots+2f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n\right]$$

رابطه ی فوق دستوری برای محاسبه $\int_a^b f(x)\,dx$ به نام قاعده سیمپسون

مثال: تقریب های از $\int_1^{1,3}\sqrt{x}\,dx$ را به روش سیمپسون و به ازای $h=0,15$ و $h=0,05$ به دست آورید.

حل:

به ازای $h=0,15$ $n=2$

x_0 x_1 x_2

1   1,15   1,3

داریم:

$$\int_1^{1,3}\sqrt{x}\,dx = S(0,15) \simeq \frac{h}{3}\left[f_0+4f_1+f_2\right]$$

$$=\frac{0,15}{3}\left[\sqrt{1}+4\sqrt{1,15}+\sqrt{1,3}\right]=0,321485$$

- به ازای $h=0,05$ داریم: $n=6$

x_0 x_1 … x_6

1   1,05   1,1   1,15   1,2   1,25   1,3

$$\int_1^{1,3}\sqrt{x}\,dx = S(0,05) \simeq \frac{h}{3}\left[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+4f_5+f_6\right]$$

Subject
Date

$$= \frac{0/05}{3}\left[\sqrt{1} + 4\sqrt{1/05} + 2\sqrt{1/1} + 4\sqrt{1/15} + 2\sqrt{1/2} + 4\sqrt{1/25} + \sqrt{1/3}\right]$$

$$= 0/32149$$

$$\int_1^{1/3} x^{1/2}\,dx \longrightarrow$$ به روش سیمپسون حل کنید

مثال: مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ را با $S(0/25)$ بدست آورید. $\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$

حل:

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$0 \quad 0/25 \quad 0/5 \quad 0/75 \quad 1$

$h = 0/25 \ , \ f(x) = \frac{\sin x}{x} \ , \ b = 1 \ , \ a = 0$

$n = 4$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = S(0/25) \simeq \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4\right]$$

$$= 0/9461$$

خطای قاعده‌ی ذوزنقه‌ای:

اگر x_n و ... و x_1 و x_0 نقاطی دو به دو متمایز و f_n و ... و f_1 و f_0 مقادیر $f(n)$ در فاصله‌ی $[a, b]$ باشد آنگاه خطای قاعده‌ی ذوزنقه‌ای را با $E(T(h))$ نشان می‌دهند متناسب است با رابطه زیر:

$$E(T(h)) \simeq -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\beta)$$

β نقطه‌ای در فاصله‌ی $[a,b]$ می‌باشد. چون β در بعضی موارد به راحتی مشخص نمی‌باشد لذا حداکثر خطای ذوزنقه‌ای از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$|E(T(h))| \leq \frac{b-a}{12} h^2 . M_2$$

M_2 کران بالا برای $f''(x)$ است

$$\left(|f''(x)| \leq M_2\right)$$

PaPCO

از رابطه‌ی فوق می‌توان استفاده کرد. به طوری که اگر بخواهیم محاسبه‌ی انتگرال به روش ذوزنقه‌ای خطای کمتر از ε داشته باشد کافی است h را از رابطه‌ی زیر به دست آوریم و به ازای h به دست آمده حاصل $\int_a^b f(x)\,dx$ دارای حداکثر خطای ε می‌باشد.

$$\boxed{\frac{b-a}{12} h^2 M_2 < \varepsilon}$$

☆ نکته: خطای قاعده‌ی ذوزنقه‌ای متناسب با h^2 می‌باشد یعنی اگر فاصله نصف شود خطا $\frac{1}{4}$ می‌باشد. به علاوه‌ی خطای قاعده‌ی ذوزنقه‌ای با مشتق دوم تابع $f(x)$ متناسب است یعنی خطای قاعده‌ی ذوزنقه‌ای برای چندجمله‌ای حداکثر از درجه 1 صفر است.

مثال: تقریبی از $\int_0^1 x\sin x\,dx$ به دست آورید به طوری که خطای آن حداکثر 10^{-2} باشد. (مثال مهم)

حل: داریم

$$a=0 \quad , \quad b=1 \quad , \quad f(x)=x\sin x \quad , \quad \varepsilon=10^{-2}$$

می‌بایست h را از رابطه‌ی زیر به دست آوریم:

$$\frac{b-a}{12} h^2 M_2 < \varepsilon \Rightarrow \frac{1-0}{12} h^2 M_2 < 10^{-2}$$

$$f(x)=x\sin x \Rightarrow f'(x)=\sin x + x\cos x \Rightarrow f''(x)=2\cos x - x\sin x$$

$* \quad |a \pm b| \leq |a|+|b|$ نامساوی مثلث $\quad |\cos x| \leq 1$, $|\sin x| \leq 1$

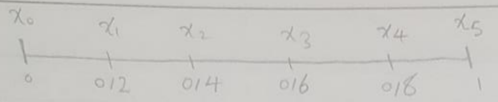
$$M_2 = |f''(x)| = |2\cos x - x\sin x| \leq 2|\cos x| + |x||\sin x| \leq 2 + |x| \leq 3 = M_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12} h^2 \times 3 < 10^{-2} \Rightarrow \frac{h^2}{4} < 10^{-2} \Rightarrow h^2 < 4\times 10^{-2}$$

$\boxed{h \leq 0/2}$

با انتخاب $h=0/2$ داریم:

Subject
Date



$h=5$

$$\int_0^1 x\sin x\,dx = T(0/2) \simeq \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + f_5\right]$$

$$= \frac{0/2}{2}\left[0 + 2\left(0/2\sin(0/2) + 0/4\sin(0/4) + \cdots + (1)\sin(1)\right]$$

$$= 0/30578$$

خطای قاعده‌ی سیمپسون:

خطای قاعده‌ی سیمپسون را با $E(S(h))$ نشان داده و ثابت می‌شود که متناسب با h^4 می‌باشد:

$$E(S(h)) \simeq -\frac{b-a}{180}h^4 \cdot f^{(4)}(\beta)$$

که β نقطه‌ای در فاصله‌ی $[a,b]$ می‌باشد.
لذا حداکثر خطای ایجاد شده توسط قاعده‌ی سیمپسون به صورت زیر می‌باشد:

$$|E(S(h))| \leq \frac{b-a}{180}h^4 \cdot M_4$$

که M_4 کران بالای $f^{(4)}(x)$ می‌باشد یعنی

$$\left(|f^{(4)}(x)|\right) \leq M_4$$

رابطه‌ی فوق برای تعیین انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ به روش سیمپسون مبنی بر این که خطای حاصله از عدد ε کوچکتر باشد، به صورت زیر استفاده می‌شود

(*)

$$\frac{b-a}{180}h^4 M_4 < \varepsilon$$

مثال: h را طوری بیابید که $S(h)$، مقدار انتگرال $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$ را با حداکثر خطای $\varepsilon = 10^{-5}$ تعیین کند.

PAPCO

Subject
Date

از رابطه‌ی ستاره در قبل استفاده می‌کنیم (★)

حل: داریم

$a = 0 \ , \ b = \frac{\pi}{2} \ , \ f(x) = x\cos x$

برای محاسبه‌ی M_4

$f(x) = x\cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - x\sin x \Rightarrow f''(x) = -2\sin x - x\cos x$

$f'''(x) = -3\cos x + x\sin x \Rightarrow f^{(4)}(x) = 4\sin x + x\cos x$

$|f^{(4)}(x)| = |4\sin x + x\cos x| \leqslant 4\,|\sin x| + |x|\,|\cos x| \leqslant 4 + |x| \leqslant 4 + \pi/2 \leqslant 6$

$M_4 = 6$

در قبل (★) $\longrightarrow \frac{\pi/2 - 0}{180} h^4 \cdot 6 < 10^{-5} \Rightarrow \frac{\pi h^4}{60} < 10^{-5}$

$h^4 < \frac{60 \times 10^{-5}}{\pi} \Rightarrow h \leqslant \sqrt[4]{\frac{60 \times 10^{-5}}{\pi}} \simeq 0{,}1176$

$h \leqslant 0{,}1176$

از طرفی داریم:

$\frac{b-a}{n} = h \Rightarrow n = \frac{b-a}{h} = \frac{\pi/2 - 0}{0{,}1176} \geqslant \frac{\pi/2}{0{,}1176} = 13{,}571$

$\Rightarrow n \geqslant 13{,}3571 \Rightarrow \boxed{n = 14}$ → چون قاعده‌ی سیمپسون است پس حتماً باید n زوج باشد

مثال: خطای قاعده‌ی ذوزنقه‌ای در محاسبه‌ی $\int_1^{1,2} \sqrt{x}\, dx$ را بیابید.

حل: داریم

$|E(T(h))| \leqslant \frac{b-a}{12} h^2 M_2$

$f(x) = \sqrt{x} \ , \ a = 1 \ , \ b = 1{,}2$

PAPCO

Subject
Date

$f(x) = x^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

$|f''(x)| = \left|\frac{1}{4x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{4} = M_2$

$|E(T(h))| \leq \frac{1/2 - 1}{12} h^2 \cdot \frac{1}{4}$

«فصل چهارم»

حل عددی معادلات دیفرانسیل:

- حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول:

برای حل عددی معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی اول $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم:

1) روش اویلر (تیلور) ساده
2) روش رونگه_کوتا

روش اویلر (تیلور) ساده:

برای حل عددی معادله $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ به روش اویلر ساده در فاصله‌ی $[a,b]$ ابتدا فاصله‌ی فوق را به n زیرفاصله‌ی $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ به طول گام $h = \frac{b-a}{n}$ تجزیه کرده و اگر مقدار y در نقطه‌ی x_i را با y_i نشان دهیم یعنی $y_i = y(x_i)$ آنگاه به کمک بسط تیلور تابع $f(x,y)$ برای تعیین y_n از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_{n+1} \simeq y_n + h f(x_n, y_n) \\ y(x_0) = y_0 \quad \text{شرط اولیه} \end{cases}$$

رابطه‌ی فوق دستوری برای حل عددی معادله $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ به روش اویلر ساده می‌باشد.

PAPCO

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل

$$\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{y}{x} \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

را درنظر بگیرید. به روش اویلر ساده تقریبی از جواب معادله را در $x = 2{,}1$ با قراردادن $h = 0{,}1$ بدست آورید.

حل: داریم

$$h = 0{,}1 \ , \quad f(x,y) = 1 - y/x \ , \quad x_0 = 2 \ , \quad y_0 = 2$$

$x_0 = 2$ $\quad x_1 = 2{,}1$

$y_0 = 2$ $\quad y_1 = ?$

$$y_{n+1} \simeq y_n + h f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} \simeq y_n + 0{,}1\left(1 - \frac{y_n}{x_n}\right)$$

$$n = 0 \rightarrow y_1 \simeq y_0 + 0{,}1\left(1 - \frac{y_0}{x_0}\right) \rightarrow y_1 \simeq 2 + 0{,}1\left(1 - \frac{2}{2}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{y(2{,}1) = y_1 \simeq 2}$$

مثال. تقریبی از $y(0{,}5)$ را به ازای $h = 0{,}1$ برای معادله مثال قبلی بدست آورید.

مثال. تقریبی از $y(0{,}5)$ را به ازای $h = 0{,}1$ برای معادله‌ی زیر بنویسید.

تا 0,5 ادامه می‌دهیم

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ $\quad x_1 = 0{,}1$ $\quad x_2 = 0{,}2$ $\quad x_5 = 0{,}5$

$y_0 = 1$ $\quad y_1 = ?$ $\quad y_2 = ?$ $\quad y_5 = ?$

$$y_{n+1} \simeq y_n + h f(x_n, y_n) \Rightarrow \boxed{y_{n+1} \simeq y_n + 0{,}1(x_n + y_n)}$$

Subject
Date

$$\begin{cases} n=0 \Rightarrow y_1 \simeq y_0 + 0{,}1(x_0+y_0) = 1 + 0{,}1(0+1) = 1{,}1 \\ n=1 \Rightarrow y_2 \simeq y_1 + 0{,}1(x_1+y_1) = 1{,}1 + 0{,}1(0{,}1+1{,}1) = 1{,}22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n=2 \Rightarrow y_3 \simeq y_2 + 0{,}1(x_2+y_2) = 1{,}22 + 0{,}1(0{,}2+1{,}22) = 1{,}362 \\ n=3 \Rightarrow y_4 \simeq y_3 + 0{,}1(x_3+y_3) = 1{,}5282 \\ n=4 \Rightarrow y_5 \simeq y_4 + 0{,}1(x_4+y_4) = 1{,}72102 \end{cases}$$

$$\boxed{y(0{,}5) = y_5 \simeq 1{,}72102}$$

«۹۸/۵/۱۴»

«جلسه‌ی نهم»

2) روش رونگه ـ کوتای:

برای حل معادله‌ی دیفرانسیل $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ در فاصله‌ی $[a,b]$ با طول گام h از ۲ مدل رونگه ـ کوتای زیر استفاده می‌کنیم:

1) روش رونگه ـ کوتای مرتبه دوم:

اگر y_i تقریبی از جواب در نقطه‌ی x_i باشد یعنی $y(x_i) = y_i$ آنگاه فرمول رونگه ـ کوتای مرتبه دوم برای حل معادله فوق به فرم زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} K_1 = hf(x_i, y_i) \\ K_2 = hf(x_i + h, y_i + K_1) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \end{cases}$$

PaPCO

Subject
Date

مثال: تقریبی از $y(0,2)$ را بدست آورید هرگاه داشته باشیم $h = 0,1$.

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

حل:

$x_0 = 0 \quad , y_0 = 1 \quad , \quad f(x,y) = x+y \quad , h = 0,1 \quad , \quad y(0,2) = ?$

$x_0 = 0 \qquad x_1 = 0,1 \qquad x_2 = 0,2$

$y_0 = 1 \qquad y_1 = ? \qquad y_2 = ?$

مرحله‌ی اول ابتدا y_1 را بدست می‌آوریم سپس y_2

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = hf(x_i, y_i) = 0,1\,(x_i + y_i) \\ K_2 = hf(x_i + h, y_i + K_1) = 0,1(x_i + 0,1 , y_i + K_1) \end{cases}$$

$$i=0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = hf(x_0, y_0) = 0,1(x_0 + y_0) = 0,1\,(0+1) = 0,1 \\ K_2 = hf(x_0 + h, y_0 + K_1) = 0,1\,(x_0 + 0,1 + y_0 + K_1) = 0,1\,(0 + 0,1 + 1 + 0,1) \end{cases}$$

$= 0,12$

$\Rightarrow y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = 1 + \frac{1}{2}(0,1 + 0,12) = 1,11 \Rightarrow \boxed{y(0,1) = 1,11}$

$i=1 \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$

$K_1 = hf(x_1, y_1) = 0,1\,(x_1 + y_1) = 0,1\,(0,1 + 1,11) = 0,121$

$K_2 = hf(x_1 + h, y_1 + K_1) = 0,1(x_1 + 0,1 + y_1 + 0,121) = 0,1(0,1 + 0,1 + 1,11$

$+ 0,121) = 0,1413$

$\Rightarrow y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = 1,11 + \frac{1}{2}(0,121 + 0,1413) = \boxed{1,24205}$

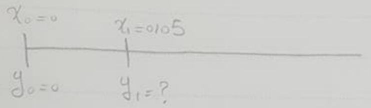
PAPCO

Subject
Date

مثال: تقریبی از $y(0.05)$ را بدست آورید هرگاه داشته باشیم $h=0.05$

$$\begin{cases} y' = 1+y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0 \quad , \quad y_0 = 0 \quad , \quad f(x,y) = 1+y \quad , \quad h = 0.05 \quad , \quad y(0.05) = ?$



$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = hf(x_i, y_i) = 0.05(1+y_i) \\ k_2 = hf(x_i+h, y_i+k_1) = 0.05(1+y_i+k_1) \end{cases}$$

$$i=0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1+k_2) = \\ k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.05(1+y_0) = 0.05(1+0) = 0.05 \\ k_2 = hf(x_0+h, y_0+k_1) = 0.05(1+y_0+k_1) = 0.05(1+0+0.05) \end{cases}$$

$= 0.0525$

$\Rightarrow y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1+k_2) = 0 + \frac{1}{2}(0.05 + 0.0525) = 0.05125$

فرمول رونگه - کوتای مرتبه چهارم:

برای حل معادله دیفرانسیل $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ با طول گام h از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود که به آن فرمول رونگه - کوتای مرتبه‌ی چهارم گویند:

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases}$$

PAPCO

Subject

Date

مثال: معادله $y' = x + y$ را با شرط $y(0) = 1$ در نظر بگیرید، تقریبی از $y(0.1)$ را با استفاده از فرمول رونگه-کوتای مرتبه‌ی چهارم با $h = 0.1$ به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$f(x,y) = x + y \quad , h = 0.1 \quad , x_0 = 0 \quad , y_0 = 1 \quad , y(0.1) = ?$$

داریم:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right] \\ K_1 = hf(x_i, y_i) = 0.1(x_i + y_i) \\ K_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}) = 0.1(x_i + \frac{0.1}{2} + y_i + \frac{K_1}{2}) \\ K_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}) = 0.1(x_i + \frac{0.1}{2} + y_i + \frac{K_2}{2}) \\ K_4 = hf(x_i + h, y_i + K_3) = 0.1(x_i + 0.1 + y_i + K_3) \end{cases}$$

$x_0 = 0$ $\quad$ $x_1 = 0.1$

$y_0 = 1$ $\quad$ $y_1 = ?$

$$i = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right] \\ K_1 = 0.1(x_0 + y_0) = 0.1(0 + 1) = 0.1 \\ K_2 = 0.1(0 + 0.05 + 1 + \frac{0.1}{2}) = 0.11 \\ K_3 = 0.1(0 + 0.05 + 1 + \frac{0.11}{2}) = 0.11050 \\ K_4 = 0.1(0 + 0.1 + 1 + 0.11050) = 0.12105 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1 = y(0.1) = 1 + \frac{1}{6}(0.1 + 2(0.11 + 0.11050) + 0.12105) = 1.11034$$

مثال: معادله $y' = 1 - y^2$ را با شرط $y(0) = 0$ در نظر بگیرید، تقریبی از $y(0.1)$ را با استفاده از فرمول رونگه-کوتای مرتبه چهارم با $h = 0.1$ به دست آورید.

Subject
Date

$f(x,y) = 1 - y^2 \quad , h = 0/1 \quad , x_0 = 0 \quad , y_0 = 1 \quad , y(0/1) = ?$

$$i = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] \\ K_1 = 0/1 \\ K_2 = 0/09975 \\ K_3 = 0/09975 \\ K_4 = 0/09900 \end{cases}$$

با استفاده از فرمول ها مثال قبل دقیقا محاسبه شده اند

$$\boxed{y_1 = y(0/1) = 0/09967}$$

«فصل پنجم»

روش حداقل مربعات:

روشی است برای تعیین یک منحنی که مجموع مربعات فواصل هر یک از نقاط از آن منحنی min باشد با توجه به نوع داده ها می توان منحنی خاص را پیدا کرد

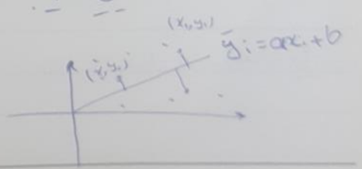
خط حداقل مربعات:

مسئله تخمین مقادیر یک تابع برای داده های جدولی می باشد به بیانی دیگر هدف یافتن بهترین خطی است که بتواند به عنوان تابع تقریب ساز به کار رود و الا اینکه داده ها در تک نقطه دقیقا منطبق نباشند لذا ما قرار دهیم:

$\bar{y}_i = a_0 + a_1 x$

مسئله عبارت است از تعیین ضرایب a_0 و a_1 به طوری که مقدار زیر را min کند:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}_i)^2$$



Subject
Date

یعنی هدف یافتن نقاطی است که S ، min گردد یعنی می‌خواهیم a_0 و a_1 را بدست آوریم که در آن
S ، min گردد بنابر min , max گیری در توابع ۲ متغیره

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x)^2 \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \end{cases}$$

یعنی با قرار دادن مشتقات رابطه‌ی (1) در دستگاه فوق برای یافتن a_0 و a_1 به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} m a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i + a_1 (\sum_{i=1}^{m} x_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i m_i \end{cases}$$

PAPCO

Subject
Date

یعنی هدف یافتن نقاطی است که S، min گردد یعنی می‌خواهیم a_0 و a_1 را بدست آوریم که در آن S، min گردد. بنابر min و max کردن توابع ۲ متغیره

$$S=\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y}_i)^2=\sum_{i=1}^{m}(y_i-a_0-a_1x)^2 \quad (1)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial a_0}=0\\[2mm]\dfrac{\partial S}{\partial a_1}=0\end{cases}$$

یعنی با قرار دادن مشتقات رابطه‌ی (1) در دستگاه فوق برای یافتن a_0 و a_1 به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}ma_0+a_1\sum_{i=1}^{m}x_i=\sum_{i=1}^{m}y_i\\ a_0\sum_{i=1}^{m}x_i+a_1\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^2\right)=\sum_{i=1}^{m}x_iy_i\end{cases}$$

m تعداد نقاط در نظر گرفته شده است

مثال: فرض کنید داده‌های زیر نتیجه‌ی یک آزمایش باشد

	x_0	x_1	x_2					x_7
x_i	1	3	4	6	8	9	11	14
y_i	1	2	4	4	5	7	8	9

خط حداقل مربعات را برای حل بدست آورید که داده‌های فوق را برازش کند.

حل: داریم $n=8$، هدف یافتن معادله خط $y=a_0+a_1x$ می‌باشد. a_0 و a_1 از دستگاه زیر بدست می‌آیند:

$$*\begin{cases}8a_0+a_1\left(\sum_{i=0}^{8}x_i\right)=\sum_{i=0}^{8}y_i\\ a_0\left(\sum_{i=0}^{8}x_i\right)+a_1\left(\sum_{i=0}^{8}x_i^2\right)=\sum_{i=0}^{8}x_iy_i\end{cases}$$

PAPCO

Subject
Date

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	1	1
3	2	9	6
4	4	16	16
6	4	36	24
8	5	64	40
9	7	81	63
11	8	121	88
14	9	196	126
$\sum x_i$ 56	$\sum y_i$ 40	$\sum x_i^2$ 524	$\sum x_i y_i$ 364

در فرمول * ص قبل جایگذاری می‌کنیم

$$\Rightarrow \begin{cases} 7a_0 + 56a_1 = 40 \\ 56a_0 + 524a_1 = 364 \end{cases}$$

روش دترمینان:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 56 \\ 364 & 524 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 56 \\ 56 & 524 \end{vmatrix}} = \frac{6}{11}$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 40 \\ 56 & 364 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 56 \\ 56 & 524 \end{vmatrix}} = \frac{7}{11}$$

روش سوم
روش حذفی هم می‌توان a_0 و a_1 را بدست آورد

$$Y = a_0 + a_1 x \Rightarrow \boxed{Y = \frac{6}{11} + \frac{7}{11} x}$$

مثال: برای داده‌های زیر خط حداقل مربعات را بدست آورید.

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	0	1	2	3
y_i	1	3	2	5

حل: داریم $n=4$

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
0	1	0	0
1	3	1	3
2	2	4	4
3	5	9	15
$\sum x_i = 6$	$\sum y_i$ 11	$\sum x_i^2$ 14	$\sum x_i y_i$ 22

$$\begin{cases} 4a_0 + a_1(\sum x_i) = \sum y_i \\ a_0(\sum x_i) + a_1(\sum x_i^2) = \sum x_i y_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a_0 + 6a_1 = 11 \\ 6a_0 + 14a_1 = 22 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل شود}} y = a_0 + a_1 x$$

- روش های عددی برای حل دستگاه معادلات خطی:

برای حل دستگاه معادلات خطی از روش های زیر استفاده می‌کنیم:

1) روش ژاکوبی

2) روش گاوس ـ سایدل

برای حل دستگاه
$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = d_2 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = d_3 \end{cases}$$
مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله اول) ابتدا دستگاه را قطری غالب سازیم. یعنی شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} |a_1| > |a_2| + |a_3| \\ |b_2| > |b_1| + |b_3| \\ |c_3| > |c_1| + |c_2| \end{cases}$$

* با جابجایی مثلاً سطر اول با سطر دوم می‌توان عموماً غالب ساخت

مرحله دوم) از دستگاه فوق داریم:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_1}(d_1 - a_2x_2 - a_3x_3) \\ x_2 = \frac{1}{b_2}(d_2 - b_1x_1 - b_3x_3) \\ x_3 = \frac{1}{c_3}(d_3 - c_1x_1 - c_2x_2) \end{cases}$$

اگر نماد $x_i^{(k)}$ مقدار x_i در تکرار kام باشد آنگاه فرمول تکرار ژاکوبی برای محاسبه x_1, x_2, x_3 به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_1}(d_1 - a_2x_2^{(k)} - a_3x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{b_2}(d_2 - b_1x_1^{(k)} - b_3x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{c_3}(d_3 - c_1x_1^{(k)} - c_2x_2^{(k)}) \end{cases}$$

که تقریب اولیه را با $X^{(0)}$ نشان می دهند یعنی: $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$

رابطه‌ی فوق رابطه‌ی تکراری برای حل دستگاه به روش ژاکوبی می باشد.

- فرمول تکرار روش گاوس-سایدل به صورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_1}\left(d_1 - a_2 x_2^{(k)} - a_3 x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{b_2}\left(d_2 - b_1 x_1^{(k+1)} - b_3 x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{c_3}\left(d_3 - c_1 x_1^{(k+1)} - c_2 x_2^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

سرعت رسیدن به جواب در روش گاوس-سایدل از روش ژاکوبی سریع تر است

نکته: تفاوت روش ژاکوبی و گاوس-سایدل این است که در روش ژاکوبی برای بدست آوردن مقادیر [illegible] تنها از داده های قبلی استفاده می شود در صورتی که روش دوم گاوس-سایدل از داده های بدست آمده ی مرحله برای بدست آوردن متغیرهای دیگر استفاده می کنیم لذا روش گاوس-سایدل روشی است که سرعت [illegible] رسیدن جواب آن نسبت به ژاکوبی بیشتر است

مثال: دستگاه زیر را حل کنید: (۲ تکرار)

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

$X^{(0)} = (0, 0, 0)$ ← $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$

حل: دستگاه دستگاه قطری غالب می باشد:

$$\begin{cases} |4| > |-1| + |1| \\ |6| > |1| + |2| \\ |5| > |-1| + |-2| \end{cases}$$

Subject

Date

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(4 + x_2 - x_3) \\ x_2 = \frac{1}{6}(9 - x_1 - 2x_3) \\ x_3 = \frac{1}{5}(2 + x_1 + 2x_2) \end{cases}$$

فرمول ژاکوبی:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(4 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{6}\left(9 - x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(2 + x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)}\right) \end{cases}$$

$$K=0 \longrightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}\left(4 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{4}(4+0-0) = 1 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{6}\left(9 - x_1^{(0)} - 2x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{6}(9-0-0) = \frac{3}{2} = 1,5 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{5}\left(2 + x_1^{(0)} + 2x_2^{(0)}\right) = \frac{1}{5}(2+0+0) = 0,4 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = (\underset{x_1^{(1)}}{1},\ \underset{x_2^{(1)}}{1,5},\ \underset{x_3^{(1)}}{0,4})$$

$$K=1 \longrightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{4}\left(4 + x_2^{(1)} - x_3^{(1)}\right) = 1,275 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{6}\left(9 - x_1^{(1)} - 2x_3^{(1)}\right) = 1,2 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{5}\left(2 + x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}\right) = 1,2 \end{cases}$$

$$\boxed{x^{(2)} = (1,275,\ 1,2,\ 1,2)}$$

مثال: دستگاه مثال قبل را با ۲ تکرار به روش گاوس - سایدل حل کنید.

فرمول تکرار روش گاوس - سایدل برای دستگاه مثال قبل بصورت زیر است:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(4 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{6}\left(9 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(2 + x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

Subject

Date

هر معادله [illegible] دارد

$$K=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}\left(4 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{4}(4+0-0) = 1 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{6}\left(9 - x_1^{(1)} - 2x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{6}(9-1-0) = \frac{4}{3} = 1{,}3333 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{5}\left(2 + x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}\right) = \frac{1}{5}\left(2+1+\frac{8}{3}\right) = \frac{17}{5} = 1{,}3333 \end{cases}$$

$$X^{(1)} = (1,\ 1{,}3333,\ 1{,}3333)$$

$\uparrow x_1^{(1)}$ $\uparrow x_2^{(1)}$ $\uparrow x_3^{(1)}$

$$K=1 \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{4}\left(4 + x_2^{(1)} - x_3^{(1)}\right) = 1{,}05 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{6}\left(9 - x_1^{(2)} - 2x_3^{(1)}\right) = 0{,}9473 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{5}\left(2 + x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)}\right) = 0{,}9889 \end{cases}$$

$$X^{(2)} = (1{,}05,\ 0{,}9473,\ 0{,}9889)$$

PAPCO

Subject
Date

هر معلق ابرام بسیار دارد

$$K=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}\left(4 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{4}(4+0-0) = 1 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{6}\left(9 - x_1^{(1)} - 2x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{6}(9-1-0) = \frac{4}{3} = 1{,}3333 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{5}\left(2 + x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}\right) = \frac{1}{5}\left(2+1+\frac{8}{3}\right) = \frac{17}{5} = 1{,}3333 \end{cases}$$

$$X^{(1)} = (\underset{x_1^{(1)}}{1},\ \underset{x_2^{(1)}}{1{,}3333},\ \underset{x_3^{(1)}}{1{,}3333})$$

$$K=1 \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{4}\left(4 + x_2^{(1)} - x_3^{(1)}\right) = 1{,}05 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{6}\left(9 - x_1^{(2)} - 2x_3^{(1)}\right) = 0{,}9473 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{5}\left(2 + x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)}\right) = 0{,}9889 \end{cases}$$

$$X^{(2)} = (1{,}05,\ 0{,}9473,\ 0{,}9889)$$

PAPCO